Soluzioni dell'appello del 19/09/2007

Dal lato dell'acqua, sulla parte verticale della parete agisce la forza $F_2 = \rho g(H' + H)(H - H')b/2$ mentre sul lato inclinato c'è la forza $F_1 = \rho g(H')^2 b/(2\cos\theta)$. Sul lato sinistro, detta ρ^* la densità del fluido incognito si ha la forza $F_3 = \rho^* g h^2 b/2$. Dall'equilibrio delle forze nella direzione orizzontale si ha $F_1 \cos\theta + F_2 = F_3$ da cui si ricava $\rho^* = \rho(H/h)^2 = 4000$ Kg/m^3. È bene notare che poihé viene richesto solo un equilibrio alla traslazione basta conoscere l'intensità delle forze mentre non è necessario calcolare i loro punti di applicazione.

Dalla relazione $t = f(V, \rho, \nu, P)$ risultando $N = 5$ e $K = 3$ il teorema di Buckingham suggerisce che la stessa relazione si può scrivere mediante $N - K = 2$ gruppi adimensionali. Scegliendo come variabili ripetute ρ, V e ν si ottiene:

$$\frac{t\nu}{V^{2/3}} = F\left(\frac{PV^{1/3}}{\rho\nu^3}\right).$$

Poiché nella sezione 1 il fluido viene aspirato si può porre $U_1 \simeq 0$ mentre dalla definizione di portata si ha $U_2 = Q/b^2 = 25$ m/s. Applicando l'equazione di bilancio della quantità di moto in forma integrale risulta quindi

$$-(p_1 - p_0)a^2 = F_x = -4668.7 \text{ N}.$$

e

$$-\rho U_2^2 b^2 + \rho g V = F_y = -11167.9 \text{ N},$$

dove $V = a^2 L + b^2 H = 1.41$ m^3 è il volume di fluido contenuto del condotto.

Dall'equazione di Bernoulli generalizzata scritta tra la sezione d'ingresso A e quella d'uscita B si ha:

$$\frac{\Delta p}{\rho} + \frac{u_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + g z_A = \frac{u_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} + g z_B + \sum_i f_i \frac{l_i}{d_i}\frac{u_i}{2} + \sum_j K_j \frac{u_j}{2}.$$

Si pone: $u_A \simeq 0$, $p_A = p_1 + \rho g h_1 = 147257$ Pa, $u_B = U_1 = 4Q/(\pi d_1^2) = 3.67$ m/s $z_B - z_A = -h_2 = -4.6$ m. Nel tubo a sezione d_1, si ha $U_1 = 4Q/(\pi d_1^2) = 3.67$ m/s, $Re = U_1 d_1/\nu = 49262$ che con $\epsilon/d_1 = 0.003$ da diagramma di Moody dà $f_1 = 0.029$. Per i tubi a sezione d_2 si ha $U_2 = 4Q/(\pi d_2^2) = 8.27$ m/s, $Re = U_2 d_2/\nu = 73893$, $\epsilon/d_2 = 0.0045$ ed $f_2 = 0.031$. Le perdite distribuite sono:

$$\sum_i f_i \frac{l_i}{d_i}\frac{u_i^2}{2} = \frac{l_1}{d_1}\frac{U_1^2}{2} f_1 + \frac{h_2 + l_3}{d_2}\frac{U_2^2}{2} f_2 = 2529.7 \,\mathrm{m^2/s^2} \quad \text{e} \quad \sum_j K_j \frac{u_j^2}{2} = \frac{U_2^2}{2}(0.5+1.5+1.9) + \frac{U_1^2}{2} 1.5 = 143.4 \,\mathrm{m^2/s^2}.$$

. Con questi valori si ricava $\Delta p = 2535884$ Pa e $P = \Delta p Q = 1648$ W.

Se sono valide le ipotesi di applicazione dall'equazione di Bernoulli $U^2/2 + p/\rho + gz =$ cost si vede che se, per esempio, la quota z é costante se aumenta la velocità U deve diminuire la pressione p o viceversa. Naturalmente ciò *può* accadere ma non è detto che effettivamente avvenga in quanto possono venir meno le ipotesi di validità dell'equazione di Bernoulli, oppure anche se quest'ultima fosse valida potrebbe non essere costante la quota z lungo la traiettoria di una particella fluida.